Soluções dos exercícios de Álgebra Linear

1. a) $v \in V_1$. b) $v \notin V_2$. c) $v \in V_3$. d) $v \notin V_4$.

2. a) Não. b) Não. c) Sim. d) Sim. e) Não. f) Não.

3. a) Sugestão: faça o produto escalar de u_1 por uma combinação linear nula da família $\underline{u}$. Repita p vezes.
   b) Sugestão: verifique que os vetores dados são dois a dois ortogonais.

4. a) $\underline{u}$ é L.I. se $\lambda \neq -4/3$. b) $\underline{u}$ é L.I. se $\lambda \neq -4$.

5. —

6. a) Base: por exemplo, $\{(1,1)\}$; $\dim(V_1) = 1$.
   b) Base: por exemplo, $\{(1,0,3/2),(0,1,0)\}$; $\dim(V_2) = 2$.
   c) Base: por exemplo, $\{(1,1/2,1/3)\}$; $\dim(V_3) = 1$.
   d) Base: por exemplo, $\{(1,1,0,0),(0,0,1,-1)\}$; $\dim(V_4) = 2$.
   e) Base: por exemplo, $\{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}$; $\dim(V_5) = 2$.
   f) Base: por exemplo, $\{(1,0,1,0),(0,1,0,0)\}$; $\dim(V_6) = 2$.

7. —

8. a) —
   b) —
   c) $v_{\{u_1,u_2\}} = (3/2, -13/2)$.

9. a) $v_{\underline{a}} = (1/2,1/2,1/2)$.
   b) $v_{\underline{b}} = (-4,2,1/2)$.
   c) —
   d) —
   e) —
   f) —
   g) $v_{\underline{g}} = (0,1/2,1/2)$.

10. a) $3A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
    b) $A + B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$
    c) —
    d) $4C - 2D = \begin{bmatrix} -4 & 14 \\ 8 & 6 \\ 0 & -14 \end{bmatrix}$
    e) $AC = \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$
    f) —
    g) $(2A)(5C) = 10AC = \begin{bmatrix} -60 & -70 \\ 50 & 30 \end{bmatrix}$
    h) —
    i) $(AC)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 21 \\ -15 & -26 \end{bmatrix}$
    j) —
    k) $A^T A = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
    l) —

11. $\alpha = 2$.

12. a) Verdade.
    b) Falso. Contra-exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.
    c) Falso. Contra-exemplo: $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$.
    d) Falso. Contra-exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0; AB = 0$.
    e) Verdade.
    f) Falso. Contra-exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

13. a) $A^T \in \mathcal{M}_{m\times n}$. b) $AA^T \in \mathcal{M}_{n\times n}$. c) $A^T A \in \mathcal{M}_{m\times m}$.

14. —

15. $C(A) = n$ e $C(A) = m$, logo $n = m$.

16. a) $C(A) = 2$. c) $C(C) = 3$. e) $C(E) = 3$. g) $C(G) = 2$. i) $C(I) = 4$.
b) $C(B) = 2$. d) $C(D) = 3$. f) $C(F) = 3$. h) $C(H) = 1$.

17. Exemplos de possíveis bases:

a) Base: $\{(6,1,3),(3,2,2),(-4,5,1)\}$.
b) Base: $\{(0,1,1),(1,2,-3),(3,-4,2)\}$.
c) Base: $\{(4,1,2),(3,1,3)\}$.
d) Base: $\{(1,-1,0,1),(0,1,1,4),(0,0,4,3),(0,0,0,1)\}$.
e) Base: $\{(1,-1,0,1),(0,1,1,4),(0,0,-1-8)\}$.
f) Base: $\{(1,2,3),(0,-1,-2),(0,0,10)\}$.

18. a) $C(A) = \begin{cases} 2, & \text{se} \quad t \in \{1,2\} \\ 3, & \text{se} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\} \end{cases}$.

b) $C(B) = \begin{cases} 2, & \text{se} \quad t \in \{-4,-2,2\} \\ 3, & \text{se} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-4,2,2\} \end{cases}$.

c) $C(C) = \begin{cases} 2, & \text{se} \quad t \in \{-1,2\} \\ 3, & \text{se} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,2\} \end{cases}$.

19. Exemplos de possíveis bases: a) Base: $\{(1,2,4),(0,-1,-3)\}$.
b) Base: $\{(1,2,4,5,1),(0,-1,-3,-3,-1),(0,0,3,1,2)\}$.
c) Base: $\{(1,-2,3,4,5),(0,1,-2,-3,-4)\}$.

20. $a = -6$, $b = 6$.

21. a) $\begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -1 \\ -1 & 7/2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} -2 & 4/5 & 9/5 \\ 3 & -4/5 & -14/5 \\ -1 & 1/5 & 6/5 \end{bmatrix}$;

22. —

23. $A^{-1} = -A^T - \frac{2}{5} Id$.

24. (a)$A^2 + A = 2I$: $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I)$; (b)$A^3 - A = 4I$: $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I)$;